CHAPITRE 1 : ANALYSE COMBINATOIRE

L'analyse combinatoire, fondée sur des formules de permutations, d'arrangements et de combinaisons possède d'importantes applications dans de nombreuses branches des mathématiques, comme par exemple le calcul des probabilités et des statistiques, où elles peuvent servir à compter le nombre de cas favorables et/ou possibles des événements d'une expérience aléatoire.

Soient deux éléments a et b :

Si $(a , b) \neq (b , a)$, on parle de disposition ordonnée.

Si $(a , b) \equiv (b , a)$, on parle de disposition non ordonnée.

1.1. PERMUTATIONS.

Une permutation est une disposition ordonnée. Le nombre de permutations que l'on peut faire avec n éléments est :

$$\mathbf{P_n = n\,! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1}$$

Exemple : Le nombre de permutations que l'on peut faire avec trois éléments a, b, c est :

$$P3 = 3\,! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Ces 6 permutations sont : (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), et (c,b,a).

1.2. ARRANGEMENTS

Un arrangement de p éléments choisis parmi n éléments est une disposition ordonnée de p de ces n éléments. On distingue les arrangements avec répétitions et les arrangements sans répétitions.

1.2.1. Arrangements sans répétitions

C'est le nombre d'arrangements que l'on peut faire avec p éléments choisis parmi n éléments, chacun d'eux ne peut figurer qu'une seule fois dans le même arrangement.

Le nombre d'arrangements sans répétitions est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple : Le nombre d'arrangements sans répétitions que l'on peut faire avec deux éléments choisis parmi trois éléments a, b, c est :

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{1} = 6$$

Ces 6 arrangements sont : (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), et (c,b).

1.2.2. Arrangements avec répétitions

C'est le nombre d'arrangements que l'on peut faire avec p éléments choisis parmi n éléments, chacun d'eux peut figurer plusieurs fois dans le même arrangement.

Le nombre d'arrangements avec répétitions est : n^p

Exemple : Le nombre d'arrangements avec répétitions que l'on peut faire avec deux éléments choisis parmi trois éléments a, b, c est : $3^2 = 9$

Ces 9 arrangements sont : (a,a), (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,b), (b,c), (c,b) et (c,c).

1.3. COMBINAISONS

Une combinaison de p éléments choisis parmi n éléments est une disposition non ordonnée de p de ces n éléments. On distingue les combinaisons avec répétitions et les combinaisons sans répétitions.

1.3.1. Combinaisons sans répétitions

C'est le nombre de combinaisons que l'on peut faire avec p éléments choisis parmi n éléments, chacun d'eux ne peut figurer qu'une seule fois dans la même combinaison.

Le nombre de combinaisons sans répétitions est :

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

Exemple : Le nombre de combinaisons sans répétitions que l'on peut faire avec deux éléments choisis parmi trois éléments a, b, c est :

$$C_3^2 = \frac{3!}{2! \times 1!} = 3$$

Ces 3 combinaisons sont : (a,b), (a,c), et (b,c).

1.3.2. Combinaisons avec répétitions

C'est le nombre de combinaisons que l'on peut faire avec p éléments choisis parmi n éléments, chacun d'eux peut figurer plusieurs fois dans la même combinaison.

Le nombre de combinaisons avec répétitions est :

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p! \times (n-1)!}$$

Exemple : Le nombre de combinaisons avec répétitions que l'on peut faire avec deux éléments choisis parmi trois éléments a, b, c est :

$$K_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

Ces 6 combinaisons sont : (a,a), (a, b), (a,c), (b,b), (b,c), et (c,c).

CHAPITRE 2 : PROBABILITES

2.1. DEFINITIONS.

2.1.1. Expérience et événement aléatoires.

La définition de la probabilité est liée aux notions d'expériences et d'événements aléatoires.

Une expérience est dite aléatoire lorsqu'on ne peut en prévoir exactement le résultat, du fait que tous les facteurs qui déterminent ce résultat ne sont pas maîtrisés.

Un événement aléatoire est un événement qui peut se réaliser ou ne pas se réaliser au cours d'une expérience aléatoire.

Exemples :

- Le jet d'un dé numéroté de 1 à 6 est une expérience aléatoire car le résultat du jet est imprévisible. L'événement avoir une face paire du dé est un événement aléatoire car le résultat du jet peut être impair comme il peut être pair.

- Le choix d'une personne dans un groupe d'individus contenant des hommes et des femmes est une expérience aléatoire car le résultat du choix est imprévisible. L'événement choisir une femme est un événement aléatoire car la personne choisie peut être une femme comme elle peut être un homme.

2.1.2. Définition classique de la probabilité.

Si au cours d'une expérience aléatoire on peut dénombrer tous les événements possibles, et si pour chaque événement on peut déterminer le nombre de cas favorables à la réalisation d'un événement aléatoire quelconque A, on définit classiquement la probabilité de l'événement A comme étant le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles.

$$p(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

Cette définition montre que la probabilité est toujours comprise entre 0 et 1.

$$0 \leq p \leq 1$$

La probabilité de tout événement qui doit nécessairement se réaliser au cours d'une expérience aléatoire est égale à 1, il s'agit d'un événement certain.

$$P(\text{événement certain}) = 1$$

La probabilité de tout événement qui ne peut pas se réaliser au cours d'une expérience aléatoire est nulle, il s'agit d'un événement impossible.

$$P(\text{événement impossible}) = 0$$

Exemple :

Dans une urne contenant 20 boules blanches, 15 boules noires, 15 boules rouges et 10 boules vertes on choisit de façon aléatoire une boule.

Le tirage de la boule est une expérience aléatoire car le résultat du tirage est imprévisible. L'événement choisir une boule blanche est un événement aléatoire car la boule tirée peut être blanche comme elle peut être d'une autre couleur.

Le nombre de boules pouvant être choisies est 60 car l'urne contient au total 60 boules. Le nombre de boules favorables à l'événement « boule blanche » est 20 car l'urne contient 20 boules blanches. La probabilité de tirer une boule blanche est donc :

$$p = \frac{20}{60} = 0{,}33$$

2.2. NOTION D'EXCLUSIVITE.

2.2.1. Evénements exclusifs.

Deux événements aléatoires d'une même expérience aléatoire sont dits exclusifs ou incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément.

Si deux événements aléatoires A et B sont exclusifs alors :

$$p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B) \qquad \text{et} \qquad p(A \text{ et } B) = 0$$

Si deux événements aléatoires A et B ne sont pas exclusifs alors :

$$p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B) - p(A \text{ et } B)$$

2.2.2. Événements mutuellement exclusifs.

Plusieurs événements aléatoires associés à une même expérience aléatoire sont dits mutuellement exclusifs ou mutuellement incompatibles s'ils sont exclusifs deux à deux.

Si k événements $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont mutuellement exclusifs alors :

$$p(A_1 \text{ ou } A_2 \text{ ou } \ldots \text{ ou } A_k) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_k)$$

Si trois événements aléatoires A, B, et C ne sont pas mutuellement exclusifs alors :

$$p(A \text{ ou } B \text{ ou } C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \text{ et } B) - p(A \text{ et } C) - p(B \text{ et } C) + p(A \text{ et } B \text{ et } C)$$

2.2.3. Evénements complémentaires.

Plusieurs événements aléatoires associés à une même expérience aléatoire sont dits totalement exclusifs ou complémentaires s'ils sont exclusifs deux à deux et si l'un d'eux doit nécessairement se réaliser.

Si k événements $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont complémentaires alors :

$$p(A_1 \text{ ou } A_2 \text{ ou } \ldots \text{ ou } A_k) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_k) = 1$$

Exemple :

Dans un jeu de cartes contenant 13 cartes de cœur, 13 cartes carreau, 13 cartes pique et 13 cartes trèfles on choisie de façon aléatoire une carte. Les 13 cartes de chaque couleur sont les cartes As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi.

Soient les événements :

- A : tirer une carte cœur $p(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
- B : tirer une carte carreau $p(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
- C : tirer une carte pique $p(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
- D : tirer une carte trèfle $p(D) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
- E : tirer une carte As $p(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
- F : tirer une carte dame $p(F) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

<u>* Probabilité de tirer une carte cœur ou carreau :</u>

Les événements A et B sont exclusifs :

$$p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

<u>* Probabilité de tirer une carte cœur ou As :</u>

Les événements A et E ne sont pas exclusifs car on peut avoir A et E simultanément c'est le cas où on tire une carte As de cœur.

$$p(\text{As de cœur}) = p(A \text{ et } E) = \frac{1}{52}$$

$$p(A \text{ ou } E) = p(A) + p(E) - p(A \text{ et } E) = \frac{1}{4} + \frac{1}{13} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

<u>* Probabilité de tirer une carte cœur ou carreau ou pique :</u>

les événements A, B, et C sont mutuellement exclusifs :

$$p(A \text{ ou } B \text{ ou } C) = p(A) + p(B) + p(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

<u>* Probabilité de tirer une carte cœur ou carreau ou dame :</u>

les événements A, B, et F ne sont pas mutuellement exclusifs :

$$p(A \text{ ou } B \text{ ou } F) = p(A) + p(B) + p(F) - p(A \text{ et } B) - p(A \text{ et } F) - p(B \text{ et } F) + p(A \text{ et } B \text{ et } F)$$

$$p(A \text{ ou } B \text{ ou } F) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{13} - 0 - \frac{1}{52} - \frac{1}{52} + 0 = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$$

2.3. NOTION D'INDEPENDANCE.

2.3.1. Probabilité conditionnelle.

Considérons le cas de plusieurs expériences aléatoires simultanées ou successives.

Soient deux événements aléatoires A et B non nécessairement exclusifs. La probabilité conditionnelle de l'événement A sous la condition B, est la probabilité de réalisation de l'événement A, lors d'une expérience, sachant que l'événement B est déjà réalisé, lors d'une expérience simultanée ou antérieure. Elle est désignée par :

$$p(A / B) = \frac{p(A \text{ et } B)}{p(B)}$$

Soient deux événements aléatoires A et B non nécessairement exclusifs. La probabilité conditionnelle de l'événement B sous la condition A, est la probabilité de réalisation de l'événement B, lors d'une expérience, sachant que l'événement A est déjà réalisé, lors d'une expérience simultanée ou antérieure. Elle est désignée par :

$$p(B / A) = \frac{p(A \text{ et } B)}{p(A)}$$

Cette définition conduit à la formule de probabilité composée :

$$P(A \text{ et } B) = p(A) \times p(B/A) = p(B) \times p(A/B)$$

On peut généraliser cette formule à plusieurs événements. Ainsi pour trois événements A, B, et C :

$$P(A \text{ et } B \text{ et } C) = p(A) \times p(B/A) \times p(C/A \text{ et } B)$$

Exemple :

Dans une urne contenant 20 boules blanches, 15 boules noires, 15 boules rouges et 10 boules vertes on choisie de façon aléatoire deux boules successives. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient blanches ?

Soient A l'événement « première boule tirée est blanche » et B l'événement « deuxième boule tirée est blanche ».
p(A) est la probabilité de tirer au premier tirage une boule blanche :

$$p(A) = \frac{20}{60} = 0{,}33$$

p(B/A) est la probabilité de tirer au deuxième tirage une boule blanche sachant que la première boule tirée est blanche.

Au deuxième tirage l'urne contient donc 59 boules dont 19 sont blanches car on a déjà tiré une boule blanche. On a donc :

$$p(B/A) = \frac{19}{59} = 0{,}32$$

P(A et B) = p(A) × p(B/A) = 0,33 × 0,32 = 0,1056

Si on tire successivement trois boules, la probabilité que les trois boules soient vertes est :

$$p = \frac{10}{60} \times \frac{9}{59} \times \frac{8}{58} = 0{,}0035$$

2.3.2. Evénements indépendants.

Deux événements A et B sont indépendants si la probabilité de voir se réaliser l'événement A ne dépend pas de la réalisation ou de la non réalisation de l'événement B. La probabilité de voir se réaliser l'événement B ne dépend pas de la réalisation ou de la non réalisation de l'événement A.

$$p(A) = p(A/B) = p(A/\text{non } B)$$

$$p(B) = p(B/A) = p(B/\text{non } A)$$

Deux événements A et B sont donc indépendants si :

$$p(A \text{ et } B) = p(A) \times p(B)$$

Plusieurs événements A_1, A_2, …, A_k sont indépendants si :

$$p(A_1 \text{ et } A_2 \text{ et } \ldots \text{ et } A_k) = p(A_1) \times p(A_2) \times \ldots \times p(A_k)$$

L'indépendance de plusieurs événements deux à deux n'entraîne pas nécessairement l'indépendance de l'ensemble des événements.

<u>Exemple :</u>

On lance deux dés parfaitement homogènes numérotés de 1 à 6. Soient :

L'événement A : résultat du premier dé est impair ;
L'événement B : résultat du deuxième dé est impair ;
L'événement A : la somme des deux résultats est impaire.

$$p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad p(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

- Indépendance de A et B :

$$p(A \text{ et } B) = p(A) \times p(B/A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = p(A) \times p(B)$$

A et B sont donc indépendants.

- Indépendance de A et C :

$$p(A \text{ et } C) = p(A) \times p(C/A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = p(A) \times p(C)$$

A et C sont donc indépendants.

- Indépendance de B et C :

$$p(B \text{ et } C) = p(B) \times p(C/B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = p(B) \times p(C)$$

B et C sont donc indépendants.

- Indépendance de A, B, et C :

p(A et B et C) = 0 car la somme de deux résultats impairs ne peut pas être impaire.

$$p(A \text{ et } B \text{ et } C) \neq p(A) \times p(B) \times p(C)$$

A, B, et C sont donc dépendants.

2.4. THEOREME DE BAYSE.

Soient E_1, E_2, …, E_k, une série de k événements aléatoires totalement exclusifs. À chacun de ces événements correspond une information initiale qui permet d'évaluer à priori les probabilités $p(E_1)$, $p(E_2)$, …, $p(E_k)$.

$$p(E_1) + p(E_2) + \ldots + p(E_k) = 1$$

Soit A un événement quelconque pour lequel on connaît à priori les probabilités conditionnelles $p(A/E_1)$, $p(A/E_2)$, …, $p(A/E_k)$.

Les événements E_1, E_2, E_k étant complémentaires, l'événement A doit se réaliser nécessairement avec E_1 ou E_2 ou ... ou E_k.

$$p(A) = p[(A \text{ et } E_1) \text{ ou } (A \text{ et } E_2) \text{ ou } \ldots \text{ ou } (A \text{ et } E_k)]$$

$$p(A) = p(A \text{ et } E_1) + p(A \text{ et } E_2) + \ldots + p(A \text{ et } E_k)$$

Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$p(A \text{ et } E_i) = p(E_i) \times p(A/E_i) \qquad (i = 1 \text{ à } k)$$

La probabilité de l'événement A est donc :

$$p(A) = p(E_1) \times p(A/E_1) + p(E_2) \times p(A/E_2) + \ldots + p(E_k) \times p(A/E_k)$$

$$p(A) = \sum_{i=1}^{k} p(E_i) \times p(A/E_i)$$

Le théorème de BAYES permet de calculer les probabilités conditionnelles à posteriori $p(E_1/A)$, $p(E_2/A)$, …, $p(E_k/A)$.

Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$p(E_i / A) = \frac{p(A \text{ et } E_i)}{p(A)}$$

$$p(E_i / A) = \frac{p(E_i) \times p(A / E_i)}{\sum_{i=1}^{k} p(E_i) \times p(A / E_i)}$$

Exemple :

La description des étudiants d'une école selon le niveau d'études et l'option étudiée donne les informations suivantes :

Désignons par N_1, N_2, N_3, et N_4 les événements « niveau 1ère année », « niveau 2ème année », « niveau 3ème année », et « niveau 4ème année » ; et désignons par G l'événement « étudiant inscrit en gestion.

On sait à priori les probabilités suivantes :

$P(N_1) = 0,35$ $P(N_2) = 0,25$ $P(N_3) = 0,225$ $P(N_4) = 0,175$

- Probabilité qu'un étudiant de la première année soit inscrit en gestion :

$$p(G/N_1)=0,32$$

- Probabilité qu'un étudiant de la deuxième année soit inscrit en gestion :

$$p(G/N_2)=0,30$$

- Probabilité qu'un étudiant de la troisième année soit inscrit en gestion :

$$p(G/N_3)=0,20$$

- Probabilité qu'un étudiant de la quatrième année soit inscrit en gestion :

$$p(G/N_4)=0,18$$

On a choisi au hasard un étudiant de l'école, il est inscrit en gestion, quelle est la probabilité qu'il soit inscrit en 1ère année, en 2ème année, en 3ème année, en 4ème année ?

La probabilité à postériori qu'un étudiant inscrit en gestion soit inscrit en 1ère année est :

$$p(N_1 / G) = \frac{p(N_1) \times p(G / N_1)}{p(N_1) \times p(G / N_1) + p(N_2) \times p(G / N_2) + p(N_3) \times p(G / N_3) + p(N_4) \times p(G / N_4)}$$

$$p(N_1 / G) = \frac{0,35 \times 0,32}{0,35 \times 0,32 + 0,25 \times 0,30 + 0,225 \times 0,20 + 0,175 \times 0,18} = 0,4250$$

La probabilité à postériori qu'un étudiant inscrit en gestion soit inscrit en 2ème année est :

$$p(N_2/G) = \frac{p(N_2)\times p(G/N_2)}{p(N_1)\times p(G/N_1) + p(N_2)\times p(G/N_2) + p(N_3)\times p(G/N_3) + p(N_4)\times p(G/N_4)}$$

$$p(N_2/G) = \frac{0{,}25\times 0{,}30}{0{,}35\times 0{,}32 + 0{,}25\times 0{,}30 + 0{,}225\times 0{,}20 + 0{,}175\times 0{,}18} = 0{,}2846$$

La probabilité à postériori qu'un étudiant inscrit en gestion soit inscrit en $3^{\text{ème}}$ année est :

$$p(N_3/G) = \frac{p(N_3)\times p(G/N_3)}{p(N_1)\times p(G/N_1) + p(N_2)\times p(G/N_2) + p(N_3)\times p(G/N_3) + p(N_4)\times p(G/N_4)}$$

$$p(N_3/G) = \frac{0{,}225\times 0{,}20}{0{,}35\times 0{,}32 + 0{,}25\times 0{,}30 + 0{,}225\times 0{,}20 + 0{,}175\times 0{,}18} = 0{,}1708$$

La probabilité à postériori qu'un étudiant inscrit en gestion soit inscrit en $4^{\text{ème}}$ année est :

$$p(N_4/G) = \frac{p(N_4)\times p(G/N_4)}{p(N_1)\times p(G/N_1) + p(N_2)\times p(G/N_2) + p(N_3)\times p(G/N_3) + p(N_4)\times p(G/N_4)}$$

$$p(N_4/G) = \frac{0{,}175\times 0{,}18}{0{,}35\times 0{,}32 + 0{,}25\times 0{,}30 + 0{,}225\times 0{,}20 + 0{,}175\times 0{,}18} = 0{,}1195$$

CHAPITRE 3 : VARIABLES ALEATOIRES

3.1. DEFINITIONS.

Une variable aléatoire X est une variable associée à une expérience ou à un groupe d'expériences aléatoires et servant à caractériser le résultat de cette expérience ou de ce groupe d'expériences.

On distingue les variables aléatoires qualitatives et les variables quantitatives qui peuvent être soit discontinues ou discrètes soit continues.

3.1.1. Variable aléatoire qualitative.

Une variable aléatoire est qualitative si elle est exprimée de façon non chiffrée.

Exemple : Soit X la variable aléatoire qui caractérise le résultat de l'expérience aléatoire "jet d'une pièce de monnaie". X est une variable aléatoire qualitative, elle ne peut prendre que les valeurs pile ou face.

Pour pouvoir éviter de travailler sur des valeurs qualitatives, on a l'habitude d'affecter un nombre à chacune des valeurs qualitatives, par exemple pour le cas de la pièce de monnaie, on pourrait affecter 1 pour la face pile et 0 pour l'autre face , de même pour le dés on a l'habitude de numéroter de 1 à 6 ses faces.

Par conséquent nous pouvons toujours considérer que nous n'avons que des variables aléatoires quantitatives.

3.1.2. Variable aléatoire quantitative discontinue et variable aléatoire quantitative continue.

Une variable aléatoire est quantitative (discontinue ou continue) si elle est exprimée de façon chiffrée. La variable ne peut prendre que des valeurs entières, si elle est discontinue ou des valeurs réelles, appartenant à un intervalle, si elle est continue..

Exemples :

- Soit X la variable aléatoire qui caractérise le résultat de l'expérience aléatoire "jet d'un dé homogène". X est une variable aléatoire quantitative discrète, elle peut prendre les valeurs entières 1, 2, 3, 4, 5, et 6.

- Soit X la variable aléatoire qui caractérise le nombre de garçons dans une famille de quatre enfants. X est une variable aléatoire quantitative discrète, elle peut prendre les valeurs entières 0, 1, 2, 3, et 4.

- Soit X la variable aléatoire qui caractérise le poids d'une personne choisie dans un groupe. X est une variable aléatoire continue, elle peut prendre toutes les valeurs possibles pour le poids d'une personne.

- Soit X la variable aléatoire qui caractérise la taille d'une personne choisie dans un groupe. X est une variable aléatoire continue, elle peut prendre toutes les valeurs possibles pour le poids d'une personne.

3.2. DISTRIBUTION DE PROBABILITE.

3.2.1. Cas d'une variable aléatoire discontinue.

La probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur k est :

$$p(k) = p(X = k)$$

L'ensemble des valeurs admissibles k et des probabilités correspondantes p(k) constitue une distribution de probabilité discontinue. La relation entre k et p(k) est appelée loi de probabilité.

Pour toutes les distributions de probabilités dont les valeurs k correspondent à des événements complémentaires, le total des probabilités est égal à 1.

$$\sum_{k=0}^{k=m} p(k) = 1$$

La distribution cumulée des probabilités est appelée fonction de répartition :

$$F(k) = p(X \leq k) = \sum_{k=0}^{k} p(k)$$

$$0 \leq F(k) \leq 1$$

<u>Exemples:</u>

- Soit X la variable aléatoire qui caractérise le résultat de l'expérience aléatoire "jet d'un dé homogène".

X est une variable aléatoire discrète, elle peut prendre les valeurs entières 1, 2, 3, 4, 5, et 6 avec la probabilité constante 1/6.

Distribution de probabilité de X

x	p(x)	F(x)
1	1/6	1/6
2	1/6	2/6
3	1/6	3/6
4	1/6	4/6
5	1/6	5/6
6	1/6	6/6
Total	1	

- Soit X la variable aléatoire qui caractérise le nombre de garçons dans une famille de quatre enfants.

X est une variable aléatoire discrète, elle peut prendre les valeurs entières 0, 1, 2, 3, et 4.

La probabilité pour qu'un enfant soit un garçon est 1/2.
La probabilité pour qu'un enfant soit une fille est 1/2.

P(0) est la probabilité que les quatre enfants soient des filles. Il y a une seule possibilité :

$$p(0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^4 = 0{,}0625$$

P(1) est la probabilité que un seul enfant soit un garçon. Ce garçon peut correspondre au premier enfant, ou au deuxième, ou au troisième ou au quatrième. Il y a donc quatre possibilités :

$$p(1) = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 4 \times (\frac{1}{2})^4 = 0{,}25$$

P(2) est la probabilité que deux enfants soient des garçons. Ces deux garçons peuvent correspondre au premier et deuxième enfants, ou au premier et troisième enfants ou au premier et quatrième enfants, ou au deuxième et troisième enfants ou au deuxième et quatrième enfants , ou au troisième et quatrième enfants. Il y a donc six possibilités :

$$p(2) = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 6 \times (\frac{1}{2})^4 = 0{,}375$$

P(3) est la probabilité que trois enfants soient des garçons. Ces trois garçons peuvent correspondre au premier et deuxième et troisième enfants, ou au premier et deuxième et quatrième enfants ou au premier et troisième et quatrième enfants ou au deuxième et troisième et quatrième enfants. Il y a donc quatre possibilités :

$$p(3) = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 4 \times (\frac{1}{2})^4 = 0{,}25$$

P(4) est la probabilité que les quatre enfants soient des garçons. Il y a une seule possibilité :

$$p(4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^4 = 0{,}0625$$

Distribution de probabilité de X

x	p(x)	F(x)
0	0,0625	0,0625
1	0,2500	0,3125
2	0,3750	0,6875
3	0,2500	0,9375
4	0,0625	1
Total	1	

3.2.2. Cas d'une variable aléatoire continue.

Un intervalle continu contient une infinité de valeurs, de ce fait la probabilité $p(X = x) \approx 0$. La notion de distribution de probabilité n'a donc plus de sens dans le cas d'une variable aléatoire continue. Par contre la fonction de répartition conserve toute sa signification.

Pour une variable aléatoire continue, on calcule la probabilité d'observer une valeur comprise dans un intervalle donné $[x\ ;\ x+\Delta x]$.

$$p(x \le X \le x+\Delta x) = p(X \le x+\Delta x) - p(X \le x) = F(x+\Delta x) - F(x)$$

Cette probabilité tend vers p(x) quand Δx tend vers 0.

$$\lim_{\Delta x \to 0} p(x \le X \le x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} F(x + \Delta x) - F(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{dF}{dx} = F'(x) = f(x)$$

La fonction f(x), dérivée de la fonction de répartition F(x), est appelée fonction de densité de probabilité.

L'ensemble des valeurs admissibles pour une variable aléatoire continue et la fonction de densité de probabilité correspondante est définissent une distribution de probabilité théorique continue.

Le produit f(x)dx est appelé élément de probabilité, c'est l'équivalent de la probabilité p(x) pour une variable aléatoire discontinue.

Pour une variable aléatoire continue, le cumul de la fonction de densité de probabilité est égal à 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Exemple :

Soit une variable aléatoire continue X définie par la fonction de densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour déterminer la constante k, il faut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{0}^{1} k \times dx = 1$$

$$k \times x \Big]_0^1 = 1$$

$$k = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit par intégration la fonction de répartition F(x) :

Si x < 0 :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \times dx = 0$$

Si 0 ≤ x ≤ 1 :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \times dx + \int_{0}^{x} 1 \times dx = x$$

Si x > 1 :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \times dx + \int_{0}^{1} 1 \times dx + \int_{1}^{x} 0 \times dx = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \ \ x < 0 \\ x & \text{si} \ \ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \ \ x > 1 \end{cases}$$

3.3. COUPLE DE VARIABLES ALEATOIRES.

Dans de nombreux cas, les résultats des expériences aléatoires peuvent être caractérisés par deux variables aléatoires X et Y. On parle alors de couple de variables aléatoires (X , Y). Ces deux variables peuvent être toutes les deux discrètes, ou toutes les deux continues ou l'une discontinue et l'autre continue.

3.3.1. Couple de variables aléatoires discontinues.

Dans le cas d'un couple de variables aléatoires quantitatives discontinues (X , Y), les valeurs respectives de x pour X et de y pour Y sont des valeurs entières.

A chaque couple de valeurs (x,y) correspond une probabilité p(x,y) d'observer simultanément la valeur x pour X et la valeur y pour Y.

$$p(X=x \text{ et } Y=y) = p(x,y)$$

L'ensemble des valeurs admissibles (x,y) et des probabilités correspondantes p(x,y) forme une distribution de probabilité discontinue à deux variables.

La fonction de répartition F(x,y) est définie par :

$$F(x,y) = p(\, X \leq x \text{ et } Y \leq y)$$

La distribution de probabilité discontinue à deux variables se présente sous forme d'un tableau à deux entrées.

X Y	y_1	y_2	…	y_j	…	y_p	p(x)
x_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$	…	$p(x_1, y_j)$	…	$p(x_1, y_p)$	$p(x_1)$
x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	…	$p(x_2, y_j)$	…	$p(x_2, y_p)$	$p(x_2)$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
X_i	$p(x_i, y_1)$	$p(x_i, y_2)$	…	$p(x_i, y_j)$	…	$p(x_i, y_p)$	$p(x_i)$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_k	$p(x_k, y_1)$	$p(x_k, y_2)$	…	$p(x_k, y_j)$	…	$p(x_k, y_p)$	$p(x_k)$
p(y)	$p(y_1)$	$p(y_2)$	…	$p(y_j)$	…	$p(y_p)$	1

k est le nombre de valeurs possibles de la variable aléatoire X.
p est le nombre de valeurs possibles de la variable aléatoire Y.

Probabilités conjointes :

La probabilité $p(x_i\ , y_j)$ est dite probabilité conjointe, s'il s'agit de la probabilité d'obtenir, en même temps, la valeur x_i pour X et la valeur y_j pour Y.

$$p(x_i,y_j) = p(X=x_i \text{ et } Y=y_j)$$

Probabilités marginales :

La probabilité $p(x_i)$ est dite probabilité marginale de X, s'il s'agit de la probabilité d'obtenir la valeur x_i quelque soit la valeur de Y.

$$\sum_{j=1}^{p} p(x_i, y_j) = p(x_i)$$

$p(y_j)$ est dite probabilité marginale de Y. C'est la probabilité d'obtenir la valeur y_j quelque soit la valeur de X.

$$\sum_{i=1}^{k} p(x_i, y_j) = p(y_j)$$

Le cumul de toutes les probabilités conjointes $p(x_i , y_j)$ est égal à 1.

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{k} p(x_i) = \sum_{j=1}^{p} p(y_j) = 1$$

Variables aléatoires indépendantes :

Par extension de la notion d'indépendance de deux événements aléatoires, deux variables aléatoires discontinues sont indépendantes, si pour tout couple de valeurs (x,y) on a :

$$p(x,y) = p(x) \times p(y)$$

Exemple :

Dans une urne contenant 4 boules blanches, 6 boules noires et 10 boules rouges, on prélève au hasard et avec remise 3 boules.

Soient la variable aléatoire X qui représente le nombre de boules blanches obtenues, et la variable aléatoire Y qui représente le nombre de boules noires obtenues.

P(0 et 0) est la probabilité que les trois boules tirées soient rouges, les prélèvements sont indépendants (tirage avec remise), on peut donc écrire :

$$p(0;0) = \frac{10}{20} \times \frac{10}{20} \times \frac{10}{20} = 0{,}125$$

P(0 et 1) est la probabilité que deux boules tirées soient rouges et une noire, il y a trois possibilités, on peut donc écrire :

$$p(0;1) = 3 \times \frac{10}{20} \times \frac{10}{20} \times \frac{6}{20} = 0{,}225$$

P(0 et 2) est la probabilité que deux boules tirées soient noires et une rouge, il y a trois possibilités, on peut donc écrire :

$$p(0;2) = 3 \times \frac{10}{20} \times \frac{6}{20} \times \frac{6}{20} = 0{,}135$$

P(0 et 3) est la probabilité que les trois boules tirées soient noires, on peut donc écrire :

$$p(0;3) = \frac{6}{20} \times \frac{6}{20} \times \frac{6}{20} = 0{,}027$$

P(1 et 0) est la probabilité que deux boules tirées soient rouges et une blanche, il y a trois possibilités, on peut donc écrire :

$$p(1;0) = 3 \times \frac{10}{20} \times \frac{10}{20} \times \frac{4}{20} = 0{,}15$$

P(1 et 1) est la probabilité qu'une boule tirée soit blanche, et une noire et une rouge, il y a six possibilités, on peut donc écrire :

$$p(1;1) = 6 \times \frac{4}{20} \times \frac{6}{20} \times \frac{10}{20} = 0{,}18$$

P(1 et 2) est la probabilité que deux boules tirées soient noires et une blanche, il y a trois possibilités, on peut donc écrire :

$$p(1;2) = 3 \times \frac{4}{20} \times \frac{6}{20} \times \frac{6}{20} = 0{,}054$$

P(1 et 3) est la probabilité que trois boules tirées soient noires et une blanche, ce qui est impossible car on tire que trois boules. On peut donc écrire :

P(1;3) = 0

P(2 et 0) est la probabilité que deux boules tirées soient blanches et une rouge, il y a trois possibilités, on peut donc écrire :

$$p(2;0) = 3 \times \frac{4}{20} \times \frac{4}{20} \times \frac{10}{20} = 0{,}06$$

P(2 et 1) est la probabilité qu'une boule tirée soit noire, et deux blanches, il y a trois possibilités, on peut donc écrire :

$$p(2;1) = 3 \times \frac{4}{20} \times \frac{4}{20} \times \frac{6}{20} = 0{,}036$$

P(2 et 2) est la probabilité que deux boules tirées soient noires et deux blanches, ce qui est impossible car on tire que trois boules. On peut donc écrire :

P(2;2) = 0

P(2 et 3) est la probabilité que trois boules tirées soient noires et deux blanches, ce qui est impossible car on tire que trois boules. On peut donc écrire :

P(2;3) = 0

P(3 et 0) est la probabilité que les trois boules tirées soient blanches, on peut donc écrire :

$$p(3;0) = \frac{4}{20} \times \frac{4}{20} \times \frac{4}{20} = 0{,}008$$

P(3 et 1) est la probabilité que trois boules tirées soient blanches et une noire, ce qui est impossible car on tire que trois boules. On peut donc écrire :

P(3;1) = 0

P(3 et 2) est la probabilité que trois boules tirées soient blanches et deux noires, ce qui est impossible car on tire que trois boules. On peut donc écrire :

P(3;2) = 0

P(3 et 3) est la probabilité que trois boules tirées soient noires et trois blanches, ce qui est impossible car on tire que trois boules. On peut donc écrire :

$$P(3;3) = 0$$

La distribution de probabilités du couple de variables aléatoires (X,Y) est :

X Y	0	1	2	3	p(x)
0	0,125	0,225	0,135	0,027	0,512
1	0,15	0,18	0,054	0	0,384
2	0,06	0,036	0	0	0,096
3	0,008	0	0	0	0,008
p(y)	0,343	0,441	0,189	0,027	1

3.3.2. Couple de variables aléatoires continues

Un couple de variables aléatoires est continu si les deux variables X et Y sont continues, elles peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle appartenant à un intervalle donné.

Un intervalle continu contient une infinité de valeurs. La probabilité d'obtenir exactement un résultat donné est généralement nulle.

$$p(X = x \text{ et } Y = y) = p(x, y) \approx 0$$

La notion de distribution de probabilité n'a donc plus de sens dans le cas continu. Par contre la fonction de répartition conserve toute sa signification.

Pour un couple de variables aléatoires continues, on calcule la probabilité d'observer des valeurs comprises dans des intervalles donnés [x ; x+Δx] pour X et [y ; y+Δy] pour Y.

$$p(x \le X \le x+\Delta x \text{ et } y \le Y \le y+\Delta y) = p(X \le x+\Delta x \text{ et } Y \le y+\Delta y) - p(X \le x \text{ et } Y \le y)$$

$$p(x \le X \le x+\Delta x \text{ et } y \le Y \le y+\Delta y) = F(x+\Delta x , y+\Delta y) - F(x , y)$$

Cette probabilité tend vers p(x,y) quand Δx et Δy tendent tous les deux vers 0.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} p(x \le X \le x + \Delta x \text{ et } y \le Y \le y + \Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y)}{\Delta x \Delta y} = \frac{d^2 F}{dxdy} = F'(x, y) = f(x, y)$$

La fonction f(x,y), dérivée de la fonction de répartition F(x,y), est appelée fonction de densité de probabilité à deux variables.

L'ensemble des valeurs admissibles (x,y) et la fonction de densité de probabilité correspondante f(x,y) définissent une distribution de probabilité théorique continue à deux variables.

Le produit f(x,y)dxdy est appelé élément de probabilité, c'est l'équivalent de la probabilité p(x,y) pour un couple de variables aléatoires discontinues.

Pour une variable aléatoire continue, le cumul de la fonction de densité de probabilité est égal à 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$$

En intégrant la fonction de densité de probabilité par rapport à l'une des variables, on obtient les fonctions de densité marginales :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \qquad\qquad f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

Par extension de la notion d'indépendance de deux événements aléatoires, deux variables aléatoires continues sont indépendantes, si pour tout couple de valeurs (x,y) :

$$f(x,y) = f(x) \times f(y)$$

Exemple :

Soit un couple de variables aléatoires continues (X,Y) définie par la fonction de densité de probabilité :

$$f(x,y) = \begin{cases} k & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \ \text{ et } \ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour déterminer la constante k, il faut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

$$\int_0^1 \int_0^1 k \times dxdy = 1$$

$$\int_0^1 [kx]_0^1 dy = 1$$

$$\int_0^1 kdy = 1$$

$$ky]_0^1 = 1$$

$$k = 1$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit par intégration la fonction de répartition F(x) :

Si x < 0 et y < 0 :

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} 0 \times dxdy = 0$$

Si 0 ≤ x ≤ 1 et 0 ≤ y ≤ 1 :

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int_0^x \int_0^y 1 \times dxdy = \int_0^x ydx = xy$$

Si x > 1 et y >1 :

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 1 \times dxdy = 1$$

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ xy & \text{si } 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \text{ et } y > 1 \end{cases}$$

3.4 CARACTERISTIQUES D'UNE VARIABLE ALEATOIRE.

3.4.1. Espérance mathématique.

On appelle espérance mathématique la valeur moyenne de la variable, elle remplace la moyenne arithmétique dans le cas d'une variable statistique.

Cas discret : $E(X) = \sum x \times p(x)$

Cas continu : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x) \, dx$

Exemple :

- Soit X la variable aléatoire qui caractérise le nombre de garçons dans une famille de quatre enfants.

Distribution de probabilité de X

x	p(x)	F(x)
0	0,0625	0,0625
1	0,2500	0,3125
2	0,3750	0,6875
3	0,2500	0,9375
4	0,0625	1
Total	1	

$$E(X) = \sum x \times p(x) = 0 \times 0{,}0625 + 1 \times 0{,}25 + 2 \times 0{,}375 + 3 \times 0{,}25 + 4 \times 0{,}0625 = 2$$

Dans une famille de quatre enfants on doit s'attendre à avoir deux garçons.

Exemple :

Soit une variable aléatoire continue X définie par la fonction de densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^1 x \times dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Propriétés :

L'espérance d'une constante est la constante : E(a) = a

$E(ax + b) = aE(X) + b$, a et b étant 2 constantes.

E(X + Y) = E(X) + E(Y)

E(X - Y) = E(X) - E(Y)

E(X × Y) = E(X) × E(Y), si les variables sont indépendantes.

L'espérance d'une fonction d'une variable X est :

Cas discret : $E(g(X)) = \sum g(x) \times p(x)$

Cas continu : $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \times f(x)dx$

<u>Exemple :</u>

Cas discret : $E(X^2) = \sum x^2 \times p(x)$

Cas continu : $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f(x)dx$

3.4.2. Variance et écart-type.

Comme pour la moyenne, la variance d'une variable aléatoire conserve la même définition que la variance d'une variable statistique. C'est l'espérance mathématique des carrés des écarts par rapport à l'espérance.

Cas discret : $V(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum (x - E(X))^2 \times p(x)$

Cas continu : $V(X) = E[(X - E(X))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 \, f(x) \, dx$

L'écart-type est égal à la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

La variance est calculée à partir de la formule développée suivante :

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2]$$

$$V(X) = E(X^2) - 2\,E(X)\,E(X) + E(X)^2$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

La variance est donc égale à la différence entre l'espérance mathématique des carrés et le carré de l'espérance mathématique.

<u>Exemple :</u>

- Soit X la variable aléatoire qui caractérise le nombre de garçons dans une famille de quatre enfants.

Distribution de probabilité de X

x	p(x)	F(x)
0	0,0625	0,0625
1	0,2500	0,3125
2	0,3750	0,6875
3	0,2500	0,9375
4	0,0625	1
Total	1	

$$E(X) = \sum x \times p(x) = 0 \times 0{,}0625 + 1 \times 0{,}25 + 2 \times 0{,}375 + 3 \times 0{,}25 + 4 \times 0{,}0625 = 2$$

$$E(X^2) = \sum x^2 \times p(x) = 0^2 \times 0{,}0625 + 1^2 \times 0{,}25 + 2^2 \times 0{,}375 + 3^2 \times 0{,}25 + 4^2 \times 0{,}0625 = 5$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 5 - 2^2 = 1$$

écart type est la racine carrée de 1 :

$$\sigma = \sqrt{1} = 1$$

<u>Exemple :</u>

Soit une variable aléatoire continue X définie par la fonction de densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^1 x \times dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \times dx = \left.\frac{x3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

Propriétés :

- La variance d'une constante est nulle : V(a) = 0
- La variance d'une transformation linéaire est :

$$V(aX + b) = E[((aX + b) - E(aX + b))^2]$$

$$V(aX + b) = E[(aX + b - aE(X) - b)^2]$$

$$V(aX + b) = E[a^2(X - E(X))^2]$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

- La variance d'une somme est la somme des variances si les variables sont indépendantes :

$$V(X + Y) = E[((X + Y) - E(X+Y))^2]$$

$$V(X + Y) = E[(X + Y - E(X) - E(Y))^2]$$

$$V(X + Y) = E[((X-E(X)) + (Y-E(Y)))^2]$$

$$V(X + Y) = E[(X-E(X))^2 + 2 (X-E(X)) (Y-E(Y)) + (Y-E(Y))^2]$$

$$V(X + Y) = E[(X-E(X))^2] + 2 E[(X-E(X)) (Y-E(Y))] + E[(Y-E(Y))^2]$$

Si X et Y sont indépendantes, on peut écrire :

$$E[(X-E(X)) (Y-E(Y))] = E(X-E(X)) E(Y-E(Y)) = 0$$

$$V(X + Y) = E[(X-E(X))^2] + E[(Y-E(Y))^2]$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

- La variance d'une différence est la somme des variances si les variables sont indépendantes :

$$V(X - Y) = E[((X - Y) - E(X-Y))^2]$$

$$V(X - Y) = E[(X - Y - E(X) + E(Y))^2]$$

$$V(X - Y) = E[((X-E(X)) - (Y-E(Y)))^2]$$

$$V(X - Y) = E[(X-E(X))^2 - 2 (X-E(X)) (Y-E(Y)) + (Y-E(Y))^2]$$

$$V(X - Y) = E[(X-E(X))^2] - 2 E[(X-E(X)) (Y-E(Y))] + E[(Y-E(Y))^2]$$

Si X et Y sont indépendantes, on peut écrire :

$$E[(X-E(X)) (Y-E(Y))] = E(X-E(X)) E(Y-E(Y)) = 0$$

$$V(X - Y) = E[(X-E(X))^2] + E[(Y-E(Y))^2]$$

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y)$$

- **Variable centrée réduite**

Une variable aléatoire est dite centrée si son espérance mathématique est nulle, elle est dite réduite si son écart-type est égal à 1.

Toute variable aléatoire peut être transformée en une variable centrée réduite par le changement de variable $\frac{X - E(X)}{\sigma}$.

3.4.3. Covariance d'un couple de variables aléatoires.

La covariance d'un couple de variables aléatoires conserve la même définition que la covariance de deux variables statistiques. Elle permet d'étudier le sens de la relation entre deux variables. C'est l'espérance mathématique des produits des écarts par rapport aux espérances.

- Cas discret

$$COV(X , Y) = E[(X - E(X) (Y - E(Y))] = \sum (x - E(X) \times (y - E(Y)) \times p(x, y)$$

- Cas continu

$$COV(X , Y) = E[(X - E(X) (Y - E(Y))] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X) \times (y - E(Y)) \times f(x, y) dxdy$$

La covariance est calculée à partir de la formule développée suivante :

$$COV(X , Y) = E[(X - E(X) (Y - E(Y))] = E[XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)]$$

$$COV(X , Y) = E(XY) - E(X) E(Y) - E(X) E(Y) + E(X) E(Y)$$

$$COV(X , Y) = E(XY) - E(X) E(Y)$$

La covariance est donc égale à la différence entre l'espérance mathématique des produits et le produit des espérances mathématiques.

$$E(XY) = \sum \sum x \times y \times p(x, y) \text{ dans le cas discret.}$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy \times f(x, y) dxdy \text{ dans le cas continu.}$$

La relation entre deux variables aléatoires est croissante ou décroissante selon que la covariance est positive ou négative.

<u>Exemple :</u>

Soit la distribution de probabilités du couple de variables aléatoires (X,Y) suivante :

X Y	0	1	2	3	p(x)
0	0,125	0,225	0,135	0,027	0,512
1	0,15	0,18	0,054	0	0,384
2	0,06	0,036	0	0	0,096
3	0,008	0	0	0	0,008
p(y)	0,343	0,441	0,189	0,027	1

$$COV(X , Y) = E(XY) - E(X) E(Y)$$

$$E(X) = \sum xp(x) = 0 \times 0{,}512 + 1 \times 0{,}384 + 2 \times 0{,}096 + 3 \times 0{,}008 = 0{,}6$$

$$E(Y) = \sum yp(y) = 0 \times 0{,}343 + 1 \times 0{,}441 + 2 \times 0{,}189 + 3 \times 0{,}027 = 0{,}9$$

$$E(XY) = \sum\sum x \times y \times p(x,y)$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= 0\times0\times0{,}125 + 0\times1\times0{,}225 + 0\times2\times0{,}135 + 0\times3\times0{,}027 + 1 \\ &+1\times0\times0{,}15 + 1\times1\times0{,}18 + 1\times2\times0{,}054 + 1\times3\times0 \\ &+2\times0\times0{,}06 + 2\times1\times0{,}036 + 2\times2\times0 + 2\times3\times0 \\ &+3\times0\times0{,}008 + 3\times1\times0 + 3\times2\times0 + 3\times3\times0 \end{aligned}$$

$$\mathrm{E(XY)} = 0{,}36$$

$$\mathrm{COV(X\ ,\ Y) = E(XY) - E(X)\ E(Y)} = 0{,}36 - 0{,}6\times0{,}9 = -\ 0{,}18$$

Exemple :

Soit un couple de variables aléatoires continues (X,Y) définie par la fonction de densité de probabilité :

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy = 1$$

$$f(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$E(X) = \int_0^1 x \times dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E(Y) = \int_0^1 y \times dy = \left.\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy \times f(x,y)dxdy$$

$$E(XY) = \int_0^1\int_0^1 xy \times dxdy = \int_0^1 \frac{1}{2} xdx = \frac{1}{4}$$

$$COV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0$$

Propriétés :

- La covariance de deux variables aléatoires indépendantes est nulle :

$$\mathrm{COV(X\ ,\ Y) = E(XY) - E(X)\ E(Y) = E(X)\ E(Y) - E(X)\ E(Y)} = 0$$

- Covariance des transformations linéaires :

Soient : X' = aX + b et Y' = cY + d (a, b, c, et d sont des constantes quelconques).

$$COV(X' , Y') = E[(X'-E(X')) (Y'-E(Y'))]$$

$$COV(X' , Y') = E[((aX+b)-E(aX+b)) ((cY+d)-E(cY+d))]$$

$$COV(X' , Y') = E[(aX-aE(X)) (cY-cE(Y))]$$

$$COV(X' , Y') = ac\ E[(X-E(X)) (Y-E(Y))]$$

$$COV(X' , Y') = ac\ COV(X , Y)$$

- On peut démonter que la covariance en valeur absolue est inférieure ou égale au produit des écart-types :

$$|COV(X,Y)| \leq \sqrt{V(X) \times V(Y)}$$

3.5. INEGALITE DE BIENAYME TCHEBYCHEV.

Cette inégalité concerne des probabilités relatives à des écarts par rapport à l'espérance mathématique supérieurs à k fois écart type, c'est à dire à des écarts centrés réduits $\frac{X - E(X)}{\sigma}$.

Quelle que soit la variable aléatoire X, la probabilité d'un intervalle [E(X)-kσ , E(X)+kσ] a pour borne inférieure $1-\frac{1}{k^2}$.

$$P(E(X)-k\sigma < X < E(X)+k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

Si on pose k = $\frac{\varepsilon}{\sigma}$ l'inégalité peut être écrite :

$$P(E(X)-\varepsilon < X < E(X)+ \varepsilon) \geq 1-\frac{V(X)}{\varepsilon^2} \quad \text{ou} \quad P(|X-E(X)| < \varepsilon) \geq 1-\frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

<u>Demonstration :</u>

$$V(X) = \sum (x - E(X))^2 p(x)$$

On peut décomposer la variance en trois sommes :

$$V(X) = S1 + S2 + S3$$

avec :

- S1 = $\sum (x - E(X))^2 p(x)$ pour $x < E(X)-k\sigma$
- S2 = $\sum (x - E(X))^2 p(x)$ pour $E(X)-k\sigma \leq x \leq E(X)+\sigma$
- S3 = $\sum (x - E(X))^2 p(x)$ pour $x > E(X)+\sigma$

$$V(X) = S1 + S2 + S3$$

$$V(X) \geq S1 + S3$$

- Pour S1 $\quad x < E(X) - k\sigma$

$x - E(X) < - k\sigma$

$(x - E(X))^2 > k^2\sigma^2$

$\sum (x - E(X))^2 p_1(x) \geq \sum k^2\sigma^2 p_1(x)$

$S1 \geq k^2\sigma^2 \sum p_1(x)$

- Pour S3 $\quad x > E(X) + k\sigma$

$x - E(X) > k\sigma$

$(x - E(X))^2 > k^2\sigma^2$

$\sum (x - E(X))^2 p_3(x) \geq \sum k^2\sigma^2 p_3(x)$

$S3 \geq k^2\sigma^2 \sum p_3(x)$

$V(X) \geq S1 + S3$

$V(X) \geq k^2\sigma^2 \sum p_1(x) + k^2\sigma^2 \sum p_3(x)$

$V(X) \geq k^2\sigma^2 \times (\sum p_1(x) + \sum p_3(x))$

$\sum p_1(x) + \sum p_3(x) = 1 - \sum p_2(x)$

On note : $\sum p_2(x) = p$

$$\sum p_2(x) = p(E(X) - k\sigma \leq X \leq E(X) + k\sigma)$$

Or $V(X) = \sigma^2$

On a donc :

$$\sigma^2 \geq k^2\sigma^2 \times (1-p)$$

$$1 \geq k^2 \times (1-p)$$

$$\frac{1}{k^2} \geq 1-p$$

$$p \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

L'inégalité de Biénaymé Tchebycheff est donc :

$$p(E(X)-k\sigma \leq X \leq E(X)+k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

ou encore :

$P(E(X)-\varepsilon < X < E(X)+\varepsilon) \geq 1-\frac{V(X)}{\varepsilon^2}$ ou $P(|X-E(X)| < \varepsilon) \geq 1-\frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

CHAPITRE 4 : LOIS DE PROBABILITES DISCRETES

Les lois théoriques essaient de décrire des phénomènes statistiques dans le but de calculer la probabilité de certains événements et donc d'avoir une certaine représentation de l'avenir.

4.1. LOI DE BERNOULLI

La loi de Bernoulli intervient dans le cas d'une seule expérience aléatoire à laquelle on associe un événement aléatoire quelconque.

La réalisation de l'événement au cours de cette expérience est appelée succès et la probabilité de réalisation est dite probabilité de succès, désignée par p. Par contre la non réalisation de l'événement est appelée échec et la probabilité de non réalisation est dite probabilité d'échec, désignée par q.

$$q = 1 - p$$

La variable aléatoire X qui caractérise le nombre de succès au cours d'une seule expérience aléatoire est appelée variable de Bernoulli, elle prend les valeurs entières 0 et 1 avec les probabilités respectives q et p.

Loi de probabilité d'une variable Bernoulli

x	p(x)
0	q
1	P
Total	1

Les caractéristiques d'une variable Bernoulli sont :

$E(X) = \sum xp(x) = 0 \times q + 1 \times p = p$

$E(X^2) = \sum x^2 p(x) = 0^2 \times q + 1^2 \times p = p$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p\,(1 - p) = pq$

Exemple :

On lance une pièce de monnaie une seule fois. Soit X la variable aléatoire qui caractérise le nombre de piles obtenues. X est une variable de Bernoulli, elle prend les valeurs entières 0 et 1 avec la probabilité constante 0,5.

Loi de probabilité de X

x	p(x)
0	0,5
1	0,5
Total	1

4.2. LOI BINOMIALE

La loi binomiale intervient dans le cas de plusieurs expériences aléatoires identiques et indépendantes aux quelles on associe un événement aléatoire quelconque.

Les probabilités p et q restent constantes au cours d'une suite d'expériences aléatoires. C'est le cas des prélèvements d'individus au hasard dans une population infinie ou le prélèvement d'individus dans une population finie, lorsque les individus sont remis en place au fur et à mesure des prélèvements.

La variable aléatoire X qui caractérise le nombre de succès au cours de n expériences aléatoires indépendantes est appelée variable binomiale, elle prend les valeurs entières de 0 à n.

La probabilité d'obtenir k succès et donc (n-k) échecs au cours de n expériences aléatoires indépendantes est, pour k = 0, 1, ..., n :

$$p(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

La loi binomiale dépend de deux paramètres :

- n = nombre d'expériences aléatoires indépendantes ;
- p = probabilité de succès au cours de chacune des n expériences aléatoires, p doit rester constante.

Une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, est notée par :

$$L(X) = B(n\ ,\ p)$$

4.2.1. Caractéristiques d'une variable binomiale

La variable Bernoulli est un cas particulier de la loi binomiale, elle correspond à la loi binomiale de paramètres 1 et p.

Une variable binomiale de paramètres n et p, peut être considérée comme étant la somme de n variables de Bernoulli identiques et indépendantes de même paramètre p.

$$X = B(n\ ,\ p)$$

$$X = X1 + X2 + \ldots + Xn$$

Avec Xi (i=1 à n) est une variable Bernoulli tel que :

$$E(Xi) = p \qquad \text{et} \qquad V(Xi) = pq$$

- **Espérance mathématique**

En appliquant la propriété de l'espérance d'une somme on peut écrire :

$$E(X) = E(X1 + X2 + \ldots + Xn)$$

$$E(X) = E(X1) + E(X2) + \ldots + E(Xn)$$

$$E(X) = p + p + \ldots + p$$

$$E(X) = np$$

- **Variance et écart-type**

En appliquant la propriété de la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes on peut écrire :

$$V(X) = V(X1 + X2 + \ldots + Xn)$$

$$V(X) = V(X1) + V(X2) + \ldots + V(Xn)$$

$$V(X) = pq + pq + \ldots + pq$$

$$V(X) = npq$$

L'écart-type : $\sigma = \sqrt{npq}$

<u>Exemple :</u>

Dans un lot important de pièces, dont 10 % sont défectueuses, on prélève un échantillon de 20 pièces. Quelle est la probabilité d'obtenir plus de deux pièces défectueuses ?

On définit la variable aléatoire X comme étant le nombre de pièces défectueuses qu'on peut obtenir dans l'échantillon. La variable X peut prendre les valeurs entières de 0 à 20.

La population des pièces peut être considérée comme une population pratiquement infinie. La probabilité de succès, c'est à dire la probabilité qu'une pièce choisie soit défectueuse, est constante et égale à 0,1. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètre 20 et 0,1.

$$X = B(20 ; 0{,}1)$$

La probabilité d'avoir plus de deux pièces défectueuses dans l'échantillon est :

$$P(X > 2) = 1 - p(X \leq 2) = 1 - p(0) - p(1) - p(2)$$

$$p(X > 2) = 1 - C_{20}^{0}\, 0{,}1^{0} \times 0{,}9^{20} - C_{20}^{1}\, 0{,}1^{1} \times 0{,}9^{19} - C_{20}^{2}\, 0{,}1^{2} \times 0{,}9^{18}$$

$$p(X > 2) = 1 - 0{,}1501 - 0{,}2702 - 0{,}2852 = 0{,}2945$$

L'espérance mathématique :

$$E(X) = np = 20 \times 0{,}1 = 2 \text{ pièces défectueuses.}$$

Dans un échantillon de 20 pièces, on peut s'attendre à avoir deux pièces défectueuses.

La variance :

$$V(X) = npq = 20 \times 0{,}1 \times 0{,}9 = 1{,}8$$

4.2.2. Propriétés

- **Additivité**

La somme de deux ou plusieurs variables binomiales indépendantes de même paramètres p est elle-même une variable binomiale.

$$X_1 = B(n_1\ ,\ p) \qquad X_2 = B(n_2\ ,\ p) \qquad \dots \qquad X_k = B(n_k\ ,\ p)$$

$$X_1 + X_2 + \dots + X_k = B(n_1 + n_2 + \dots + n_k\ ,\ p)$$

- **Formule de récurrence**

En effectuant le rapport de deux probabilités successives, on obtient :

$$p(x+1) = \frac{p(n-x)}{q(x+1)}\, p(x)$$

Exemple :

Soit la distribution binomiale de paramètres 4 et 1/6.

$$X = B(4\ ,\ 1/6)$$

La distribution de cette variable est telle que, pour x = 0, 1, 2, 3, 4 :

$$p(x) = C_4^x\, p^x q^{4-x}$$

Les probabilités p(x) peuvent être calculées par récurrence de la manière suivante :

$$p(0) = (\frac{5}{6})^4 = 0{,}4823$$

$$p(1) = \frac{\frac{1}{6} \times 4}{\frac{5}{6} \times 1} \times 0{,}4823 = 0{,}3858$$

$$p(2) = \frac{\frac{1}{6} \times 3}{\frac{5}{6} \times 2} \times 0{,}3858 = 0{,}1157$$

$$p(3) = \frac{\frac{1}{6} \times 2}{\frac{5}{6} \times 3} \times 0{,}1157 = 0{,}0154$$

$$p(4) = \frac{\frac{1}{6} \times 1}{\frac{5}{6} \times 4} \times 0{,}0154 = 0008$$

Distribution de la variable B(4 , 1/6)

x	p(x)
0	0,4823
1	0,3858
2	0,1157
3	0,0154
4	0,0008
Total	1

- Les distributions binomiales sont symétriques lorsque p = q = 1/2, la dissymétrie est d'autant plus grande que p et q sont plus différents de 1/2.

<u>Exemple :</u>

Distribution de la variable B(4 , 1/2)

x	p(x)
0	0,0625
1	0,2500
2	0,3750
3	0,2500
4	0,0625
Total	1

- **Table de la loi binomiale**

Pour le calcul de p(x), il existe des tables d'usages qui donnent ces calculs. Ces tables dépendent des paramètres n et p.

4.3. LOI POLYNOMIALE

La loi polynomiale est une généralisation de la loi binomiale. Elle intervient dans le cas de plusieurs expériences aléatoires identiques et indépendantes aux quelles on associe k événements aléatoires complémentaires quelconques. Les probabilités de succès respectives des k événements sont désignées par p_1, p_2, …, et p_k.

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

La réalisation de l'événement au cours de chacune des expériences est appelée succès et la probabilité de réalisation est dite probabilité de succès, désignée par p. Par contre la non réalisation de l'événement est appelée échec et la probabilité de non réalisation est dite probabilité d'échec, désignée par q.

$$q = 1 - p$$

Les probabilités de succès p_i (i =1 à k) restent constantes au cours d'une suite d'expériences aléatoires.

Les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_k désignent respectivement les nombres de succès au cours de n expériences aléatoires indépendantes pour chacun des k événements. Chaque variable aléatoire X_i peut prendre les valeurs entières de 0 à n. Ces variables sont telles que :

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n$$

La probabilité d'obtenir x_1 succès pour l'événement 1, et x_2 succès pour l'événement 2, …, et x_k succès pour l'événement k au cours de n expériences aléatoires indépendantes est :

$$p(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{n!}{x_1! \times x_2! \times \dots \times x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

Exemple :

On lance quatre fois de suite un dé parfaitement homogène. On désigne par la variable aléatoire X_1 le nombre de faces 1 obtenues, par X_2 le nombre de faces 2 obtenues et par X_3 le nombre de faces supérieures ou égales à 3.

La distribution de probabilité relative à ces trois variables est une distributions à deux variables, puisque la troisième variable est entièrement déterminée par la valeur des deux autres :

$$X_3 = 4 - X_1 - X_2$$

Ces trois variables peuvent être représentées par une loi polynomiale de probabilités respectives 1/6, 1/6, et 4/6.

Les différentes probabilités peuvent être calculées à l'aide de la relation :

$$p(x_1, x_2, x_3) = \frac{4!}{x_1! \times x_2! \times \ldots \times \mathrm{x_k}!} (\frac{1}{6})^{x_1} (\frac{1}{6})^{x_2} (\frac{4}{6})^{x_3}$$

$$p(0,0,4) = \frac{4!}{0! \times 0! \times 4!} (\frac{1}{6})^0 (\frac{1}{6})^0 (\frac{4}{6})^4 = 0{,}1975$$

$$p(2,1,1) = \frac{4!}{2! \times 1! \times 1!} (\frac{1}{6})^2 (\frac{1}{6})^1 (\frac{4}{6})^1 = 0{,}0370$$

On obtient ainsi la distribution de probabilité du couple (X_1 , X_2) :

X_1 X_2	0	1	2	3	4	$p(x_1)$
0	0,1976	0,1975	0,0741	0,0123	0,0008	0,4823
1	0,1975	0,1482	0,0370	0,0031	0	0,3858
2	0,0741	0,0370	0,0046	0	0	0,1157
3	0,0123	0,0031	0	0	0	0,0154
4	0,0008	0	0	0	0	0,0008
$p(x_2)$	0,4823	0,3858	0,1157	0,0154	0,0008	1

4.4. LOI HYPERGEOMETRIQUE

La loi hypergéométrique intervient dans le cas de plusieurs expériences aléatoires dépendantes aux quelles on associe un caractère étudié quelconque.

la probabilité de succès varie d'une expérience aléatoire à l'autre. C'est le cas des prélèvements d'individus au hasard dans une populations finie, lorsque les individus ne sont pas remis en place au fur et à mesure des prélèvements.

Désignons par N l'effectif total de la population dans laquelle on prélève au hasard et sans remise n individus. La population est composée d'individus qui possèdent le caractère étudié, le nombre de ces individus sera désigné par n_1. n_2 désigne le nombre d'individus de la population qui ne possèdent pas le caractère étudié.

$$N = n_1 + n_2$$

La variable aléatoire X, qui caractérise le nombre d'individus prélevés qui possèdent le caractère étudié, est appelée variable hypergéométrique, elle prend les valeurs entières de 0 à n.

La probabilité d'obtenir k individus possédant le caractère étudié parmi les n individus prélevés et donc (n-k) individus ne possédant pas le caractère étudié est, pour k = 0, 1, ..., n :

$$p(k)=\frac{C_{n_1}^{k}C_{n_2}^{n-k}}{C_{N}^{n}}$$

La loi hypergéométrique dépend de trois paramètres :

N = effectif total de la population ;
n_1 = nombre d'individus de la population qui possèdent le caractère étudié ;
n = nombre d'individus prélevés sans remise.

Une variable aléatoire X qui sui une loi hypergéométrique de paramètres N, n_1, et n est notée par :

$$L(X) = H(N, n_1 , n)$$

4.4.1. Caractéristiques d'une variable hypergéométrique

les distributions hypergéométriques possèdent des propriétés semblables à celles des distributions binomiales.
La proportion des individus de la population qui possèdent le caractère étudié est : $p=\frac{n_1}{N}$
La proportion des individus de la population qui ne possèdent pas le caractère étudié est : $q=\frac{n_2}{N}$

$$E(X) = np \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{N-n}{N-1}\,npq \qquad \text{avec} \qquad p=\frac{n1}{N}$$

Exemple :

Dans une population de 40 personnes, dont 6 personnes sont originaires du Sud, 14 du Nord, 12 de l'Est et 8 de l'Ouest, on choisit au hasard un échantillon de 4 personnes.

La variable aléatoire X désigne le nombre d'individus de l'échantillon qui sont originaire du Nord.

La population étant finie et les prélèvements s'effectuent sans remise, la variable X suit donc une loi hypergéométrique de paramètres :

- N = effectif total de la population = 40
- n_1 = nombre d'individus de la population qui sont originaires du Nord = 14
- n = nombre d'individus prélevés sans remise = 4

$$X = H(40, 14, 4)$$

La distribution de cette variable est telle que, pour x = 0, 1, 2, 3, 4 :

$$p(0) = \frac{C_{14}^{0} C_{26}^{4}}{C_{40}^{4}} = 0{,}1636$$

$$p(1) = \frac{C_{14}^{1} C_{26}^{3}}{C_{40}^{4}} = 0{,}3983$$

$$p(2) = \frac{C_{14}^{2} C_{26}^{2}}{C_{40}^{4}} = 0{,}3236$$

$$p(3) = \frac{C_{14}^{3} C_{26}^{1}}{C_{40}^{4}} = 0{,}1036$$

$$p(4) = \frac{C_{14}^{4} C_{26}^{0}}{C_{40}^{4}} = 0{,}0110$$

Distribution de probabilité de X

x	p(x)
0	0,1636
1	0,3983
2	0,3236
3	0,1036
4	0,0110
Total	1

La proportion des individus de la population qui sont originaires du Nord est :

$$p = \frac{14}{40} = 0{,}35$$

La proportion des individus de la population qui ne sont pas originaires du Nord est :

$$q = \frac{26}{40} = 0{,}65$$

- Espérance mathématique : $E(X) = np = 4 \times 0{,}35 = 1{,}4$
- Variance et écart-type : $V(X) = \frac{N-n}{N-1}\ npq = \frac{40-4}{40-1}\ x4 \times 0{,}35 \times 0{,}65 = 0{,}84$
- Ecart-type : $\sigma = \sqrt{0{,}84} = 0{,}92$

4.4.2. Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale

Dès que l'effectif N de la population devient important, le calcul de $p(x) = \frac{C_{n_1}^{x} C_{n_2}^{n-x}}{C_N^n}$ devient fastidieux. On peut démonter dans ce cas que lorsque l'effectif de la population (N) tend vers l'infini et la proportion des individus possédant le caractère étudié (p) est constante ou tend vers une constante, la loi hypergéométrique tend vers une loi binomiale de paramètre n et p. On peut dans ce cas effectuer les calculs de probabilités de façon approximatives à l'aide de la formule de la loi binomiale. En pratique, l'approximation est satisfaisante dés que la proportion des individus prélevés est inférieure à 5 %.

$$\frac{n}{N} < 0{,}05 \quad \text{ou} \quad \mathrm{N} > 20\,\mathrm{n}$$

Exemple :

Soit la variable hypergéométrique H(100, 30, 4)

La distribution de cette variable est telle que, pour x = 0, 1, 2, 3, 4 :

$$p(x) = \frac{C_{30}^{x} C_{70}^{4-x}}{C_{100}^{4}}$$

Distribution de probabilité de X = H(100, 30, 4)

x	p(x)
0	0,2338
1	0,4188
2	0,2679
3	0,0725
4	0,0070
Total	1

La distribution de cette variable peut être calculée à l'aide de l'approximation par la loi binomiale de paramètres 4 et 0,3. Les probabilités approximatives sont telle que, pour x = 0, 1, 2, 3, 4 :

$$p(x) = C_4^x 0{,}3^x \times 0{,}7^{4-x}$$

Distribution de probabilité de X = B(4 ; 0,3)

x	p(x)
0	0,2401
1	0,4116
2	0,2646
3	0,0756
4	0,0081
Total	1

On constate que l'approximation est satisfaisante.

4.5. LOI HYPERGEOMETRIQUE GENERALISEE.

La loi hypergéométrique généralisée est une généralisation de la loi hypergéométrique. Elle intervient dans le cas de plusieurs expériences aléatoires dépendantes aux quelles on associe k caractères étudiés. C'est le cas des prélèvements d'individus au hasard dans une population finie, lorsque les individus ne sont pas remis en place au fur et à mesure des prélèvements.

Désignons par N l'effectif total de la population dans laquelle on prélève au hasard et sans remise n individus. La population est composée d'individus qui possèdent le 1^{er} caractère étudié, le nombre de ces individus sera désigné par n_1. n_2 désigne le nombre d'individus de la population qui possèdent le $2^{ème}$ caractère étudié, …, n_k désigne le nombre d'individus de la population qui possèdent le $k^{ème}$ caractère étudié.

$$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

Les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_k désignent respectivement les nombres d'individus prélevés qui possèdent le 1^{er} caractère, le $2^{ème}$ caractère, …, et le $k^{ème}$ caractère. Chaque variable aléatoire X_i peut prendre les valeurs entières de 0 à n. Ces variables sont telles que :

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n$$

La probabilité d'obtenir x_1 individus possédant le 1^{er} caractère, et x_2 individus possédant le $2^{ème}$ caractère, …, et x_k individus possédant le $k^{ème}$ caractère parmi les n individus prélevés est :

$$p(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{C_{n_1}^{m_1} \times C_{n_2}^{m_2} \times \ldots \times C_{n_k}^{m_k}}{C_N^n}$$

<u>Exemple :</u>

Dans une population de 40 personnes, dont 6 personnes sont originaires du Sud, 14 du Nord, 12 de l'Est et 8 de l'Ouest, on choisit au hasard un échantillon de 4 personnes.

Quelle est la probabilité d'avoir une personne de chaque région ?

Les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 désignent respectivement les nombres d'individus prélevés du Sud, du Nord, de l'Est et de l'Ouest. Chaque variable aléatoire X_i peut prendre les valeurs entières de 0 à 4. Ces variables suivent une loi hypergéométrique généralisée.

La probabilité d'obtenir x_1 individus du Sud, et x_2 individus du Nord, et x_3 individus de l'Est , et x_4 individus de l'Ouest est :

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{C_6^{x_1} \times C_{14}^{x_2} \times C_{12}^{x_3} \times C_8^{x_4}}{C_{40}^4}$$

La probabilité d'avoir une personne de chaque région est donc :

$$p(1,1,1,1) = \frac{C_6^1 \times C_{14}^1 \times C_{12}^1 \times C_8^1}{C_{40}^4} = 0{,}0882$$

4.6. LOI DE POISSON

La loi de Poisson intervient pour des phénomènes statistiques dont le nombre de réalisation varie de 0 à l'infini et dont la fréquence moyenne de réalisation est connue.

Exemple :

Nombre d'appels reçus par un standard téléphonique.
Nombre d'accidents de la circulation.
Nombre de visiteurs d'un centre commercial.

La variable aléatoire X qui caractérise le nombre de réalisations de ce phénomène est appelée variable de Poisson, elle prend les valeurs entières 0,1, 2, …etc.

La probabilité d'obtenir k réalisations est, pour k = 0, 1, 2, ... :

$$p(k) = \frac{e^{-m} \times m^{k}}{k!}$$

La loi de poisson dépend d'un seul paramètre :

m = fréquence moyenne du phénomène étudié.

Une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre m est notée par :

$$L(X) = P(m)$$

Exemple :

Un port a les moyens techniques de recevoir au maximum 4 bateaux pétroliers par jour. Le reste est envoyé vers un autres port. Quelle est la probabilité qu'un jour donnée, le port ne puisse recevoir tous les bateaux qui se présentent, si on sait qu'en moyenne 3 bateaux se présentent par jour.

Désignons par la variable aléatoire X, le nombre de bateaux qui se présentent un jour donnée. X suit une loi de poisson de paramètre 3.

$$X = P(3)$$

La probabilité qu'un jour donnée, le port ne puisse recevoir tous les bateaux qui se présentent est :

$$P(X > 4) = 1 - p(X \leq 4) = 1 - p(0) - p(1) - p(2) - p(3) - p(4)$$

$$p(X > 4) = 1 - \frac{e^{-3} \times 3^{0}}{0!} - \frac{e^{-3} \times 3^{1}}{1!} - \frac{e^{-3} \times 3^{2}}{2!} - \frac{e^{-3} \times 3^{3}}{3!} - \frac{e^{-3} \times 3^{4}}{4!}$$

$$p(X > 4) = 1 - 0{,}0498 - 0{,}1494 - 0{,}2240 - 0{,}2240 - 0{,}1680 = 0{,}1840$$

4.6.1. Caractéristiques d'une variable de Poisson

On peut démontrer que l'espérance mathématique d'une variable de poisson est égale à sa variance est égale au paramètre m :

$$E(X) = V(X) = m$$

4.6.2. Propriété d'additivité

La somme de deux ou plusieurs variables de poisson indépendantes de paramètres respectives m_1, m_2, …, m_k est elle-même une variable de poisson de paramètre la somme des paramètres m_i.

$$X_1 = P(m_1) \qquad X_2 = P(m_2) \quad \ldots \quad X_k = P(m_k)$$

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_k = P(m_1 + m_2 + \ldots + m_k)$$

4.6.3. Formule de récurrence

En effectuant le rapport de deux probabilités successives, on obtient :

$$p(x+1) = p(x) \times \frac{m}{x+1}$$

<u>Exemple :</u>

Soit la distribution de poisson de paramètre 3.

$$X = P(3)$$

La distribution de cette variable est telle que, pour x = 0, 1, 2, 3, 4, …

$$p(x) = \frac{e^{-3} \times 3^x}{x!}$$

Les probabilités p(x) peuvent être calculées par récurrence de la manière suivante :

$$p(0) = e^{-3} = 0{,}0498$$

$$p(1) = 0{,}0498 \times \frac{3}{1} = 0{,}1494$$

$$p(2) = 0{,}1494 \times \frac{3}{2} = 0{,}2240$$

$$p(3) = 0{,}2240 \times \frac{3}{3} = 0{,}2240$$

$$p(4) = 0{,}2240 \times \frac{3}{4} = 0{,}1680$$

4.6.4. Table de la loi de poisson

Pour le calcul de p(x), il existe des tables d'usages qui donnent ces calculs. Ces tables dépendent du paramètre mp.

4.6.5. Approximation de la loi binomiale par la loi de poisson

Dès que le paramètre n de la loi binomiale devient grand, le calcul de $p(x) = C_n^x p^x q^{n-x}$ devient fastidieux. On peut démonter dans ce cas que lorsque le nombre d'expériences indépendantes (n) tend vers l'infini et la probabilité de succès tend vers zéro de telle sorte que le produit np tend vers une constante, la loi binomiale de paramètre n et p tend vers une loi de poisson de paramètre np. On peut dans ce cas effectuer les calculs de probabilités de façon approximatives à l'aide de la formule de la loi de poisson. En pratique, l'approximation est satisfaisante lorsque la probabilité p est inférieure à 0,1 et le produit np est inférieur à 5.

<u>Exemple :</u>

Une machine fabrique des ampoules avec une proportion d'ampoules défectueuses de 5 %. Pour contrôler la qualité des ampoules, on a prélevé au hasard, dans un lot important d'ampoules, un échantillon de 20 ampoules.

Quelle est la probabilité que sur les 20 ampoules prélevées, on ait plus d'une ampoule défectueuse ?

Désignons par la variable aléatoire X, le nombre d'ampoules défectueuses dans l'échantillon. La variable X peut prendre les valeurs entières de 0 à 20.

La population des ampoules peut être considérée comme une population pratiquement infinie. La probabilité de succès, c'est à dire la probabilité qu'une ampoule choisie soit défectueuse, est constante et égale à 0,05. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètre 20 et 0,05.

$$X = B(20\ ;\ 0{,}05)$$

La probabilité d'avoir plus d'une ampoule défectueuse dans l'échantillon est :

$$p(X > 1) = p(X \leq 1) = 1 - p(0) - p(1)$$

$$p(X > 1) = 1 - C_{20}^{0}\, 0{,}05^{0} \times 0{,}95^{20} - C_{20}^{1}\, 0{,}05^{1} \times 0{,}95^{19}$$

$$p(X > 1) = 1 - 0{,}3585 - 0{,}3774 = 0{,}2641$$

La probabilité d'avoir plus d'une ampoule défectueuse dans l'échantillon peut être calculée de façon approximative à l'aide de la loi de poisson de paramètre 20×0,05 = 1, puisque la probabilité p est inférieure à 0,1 (0,05) et le produit np est inférieur à 5 (20×0,05 = 1) :

$$p(X > 1) = p(X \leq 1) = 1 - p(0) - p(1)$$

$$p(X > 1) = 1 - \frac{e^{-1} \times 1^{0}}{0!} - \frac{e^{-1} \times 1^{1}}{1!}$$

$$p(X > 1) = 1 - 0{,}3679 - 0{,}3679 = 0{,}2642$$

On constate que l'approximation est très satisfaisante.

CHAPITRE 5 : LOIS DE PROBABILITE CONTINUES

5.1. LOI NORMALE.

5.1.1. Définition.

La loi normale est la loi continue la plus importante et la plus utilisée dans le calcul de probabilité. Elle est aussi appelée loi de LAPLACE GAUSS.

On appelle variable normale toute variable aléatoire continue X définie dans l'intervalle $]-\infty,+\infty[$ par la fonction de densité de probabilité suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}$$

m et σ sont des paramètres quelconques qui représentent respectivement la moyenne et l'écart type de la variable.

La loi normale dépend de deux paramètres m et σ. Une variable aléatoire X qui suit une loi normale de paramètres m et σ est désignée par :

$$L(X) = N(m , \sigma)$$

5.1.2. Loi normale réduite

On appelle variable normale réduite toute variable aléatoire normale Z de paramètres m = 0 et σ = 1.

$$Z = N(0 , 1)$$

Une variable normale réduite est définie par la fonction de densité de probabilité suivante :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

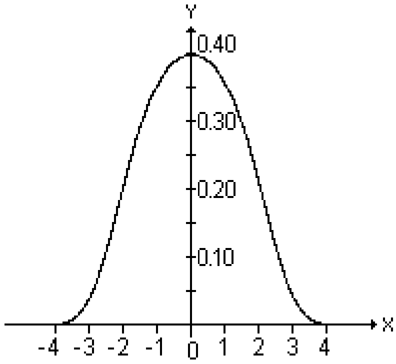
Toute variable normale X de paramètres m et σ peut être transformée en une variable normale réduite par le changement de variable suivant :

$$Z = \frac{X - m}{\sigma}$$

5.1.3. Forme de la loi normale

La représentation graphique de la fonction de densité de probabilité d'une variable normale est une courbe en forme de cloche symétrique par rapport à la moyenne m et caractérisée par l'existence d'un maximum en x = m et f(x) = $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

En particulier la loi normale réduite est symétrique par rapport à l'axe des abscisses est caractérisée par l'existence d'un maximum en z = 0 et $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}40$.



Courbe normale de Gauss

La fonction de répartition correspond à l'aire comprise entre cette courbe et l'axe des abscisses.

5.1.4. Détermination pratique des probabilités

Pour calculer des probabilités sans utiliser la fonction de densité, des tables de la loi normale réduite ont été élaborées. On distingue deux tables de la loi normale réduite, relatives l'une à la fonction de densité de probabilité et l'autre à la fonction de répartition. En raison de la symétrie de la distribution, ces tables sont limitées aux valeurs positives de z.

Par le changement de variable $Z = \frac{X - m}{\sigma}$ toutes les variables normales se ramènent à la loi normale réduite.

Table de la fonction de répartition

Cette table donne les valeurs de la fonction de répartition Π(z) pour des valeurs positives z d'une variable normale réduite. En raison de la symétrie de f(z), on peut déduire les valeurs Π(z) pour les valeurs négatives de z :

$$\Pi(-z) = p(Z \leq -z) = p(Z > z) = 1 - p(Z \leq z) = 1 - \Pi(z)$$

$$\Pi(-z) = 1 - \Pi(z)$$

Pour une variable normale quelconque X de paramètre m et σ :

$$F(x) = p(X \leq x) = p(\frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{x - m}{\sigma}) = p(Z \leq z) = \Pi(z)$$

$$F(x) = \Pi(z)$$

Pour lire une valeur Π(z) dans la table, il suffit de lire l'intersection entre la ligne correspondante à la valeur de z et la colonne correspondante au deuxième chiffre après la virgule de z.

Exemple :

Pour qu'une pièce fabriquée par une machine soit utilisable, sa longueur doit être comprise entre 14,7 et 15,3 cm, sinon elle est rejetée. Sachant que la longueur de cette pièce est une variable normale de paramètres 15 cm et 0,2 cm, quelle proportion de pièces peuvent être rejetées.

Si on désigne par la variable X la longueur des pièces, X suit une loi normale :

$$X = N(15 ; 0,2)$$

La probabilité de rejet d'une pièce est :

$$p(\text{rejet}) = 1 - p(\text{accepter})$$

$$p(\text{accepter}) = p(14,7 \leq X \leq 15,3) = p(X \leq 15,3) - p(X \leq 14,7)$$

$$p(\text{accepter}) = p\left(\frac{X-15}{0,2} \leq \frac{15,3-15}{0,2}\right) - p\left(\frac{X-15}{0,2} \leq \frac{14,7-15}{0,2}\right)$$

$$p(\text{accepter}) = p(Z \leq 1,50) - p(Z \leq -1,50)$$

$$p(\text{accepter}) = \Pi(1,50) - \Pi(-1,50)$$

$$p(\text{accepter}) = \Pi(1,50) - (1 - \Pi(1,50)) = 2 \text{ x } \Pi(1,50) - 1$$

$$p(\text{accepter}) = 2\text{x } 0,93319 - 1 = 0,13362$$

Chaque pièce a une probabilité de 0,13362 d'être rejetée ou il y a un risque de rejet de 13% des pièces fabriquées.

5.1.5. Propriété d'additivité

La somme de deux ou plusieurs variables normales indépendantes est une variable normale de moyenne la somme des moyennes et d'écart type la racine carrée de la somme des variances des variables initiales.

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables normales de paramètres respectivement $m_1, m_2, \ldots, m_n$ et $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$.

$$L(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = N(m_1 + m_2 + \ldots + m_n ; \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2})$$

Exemple :

Pour se rendre à son travail un ouvrier prend deux bus. La durée du trajet du premier bus est une variable normale de paramètres 27 minutes et 5 minutes. La durée du trajet du deuxième bus est une variable normale de paramètres 30 minutes et 2 minutes. Quelle est la probabilité que cet ouvrier n'arrive pas en retard s'il dispose d'une heure ?

- Désignons par X_1 La durée du trajet du premier bus : $X_1 = N(27 ; 5)$.
- Désignons par X_2 La durée du trajet du deuxième bus : $X_2 = N(30 ; 2)$.

- Désignons par X la durée totale des deux trajets : $X = X_1 + X_2$.

La variable X est la somme de deux variables normales indépendantes, elle suit donc une loi normale :

$$X = N(30+27\ ;\ \sqrt{5^2 + 2^2}\ ) = N(57\ ;\ 5{,}4)$$

Pour ne pas arriver en retard la durée totale des deux trajets ne doit pas dépasser 60 minutes.

$$p(X \leq 60) = p(\frac{X-57}{5{,}4} \leq \frac{60-57}{5{,}4}) = p(Z \leq 0{,}56)$$

$$p(X \leq 60) = \prod(0{,}56) = 0{,}7123$$

L'ouvrier a donc 71% de chance de ne pas arriver en retard ou il a un risque de 29 % d'arriver en retard.

5.2. LA LOI KHI DEUX DE PEARSON.

5.2.1. Définition

On appelle variable Khi deux de Pearson, la variable χ^2 qui varie entre 0 et $+\infty$ et définie par la fonction de densité de probabilité :

$$f(x) = c \times x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

Le paramètre k est une constante entière positive appelée nombre de degrés de liberté, on dit variable Khi deux à k degrés de liberté, désignée par $\chi^2_{\text{à k dl}}$.

k est une constante telle que : $\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$

La variable Khi deux de Pearson correspond aussi à la somme des carrés de k variables normales réduites indépendantes.

Soient $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$: k variables normales réduites indépendantes, on peut démontrer :

$$\chi^2_{\text{à k dl}} = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_k^2$$

5.2.2. Caractéristiques de la loi $\chi^2_{\text{à k dl}}$

On peut démontrer que :

Espérance mathématique : $E(\chi^2_{\text{à k dl}}) = k$

Variance : $V(\chi^2_{\text{à k dl}}) = 2\ k$

5.2.3. Propriété d'additivité.

La somme de deux ou plusieurs variables Khi deux indépendantes est une variable Khi deux.

Soient n variables Khi deux de degrés de liberté respectivement k_1, k_2, …, k_n :

$$\chi^2_{\text{à } k1 \text{ dl}} + \chi^2_{\text{à } k2 \text{ dl}} + \dots + \chi^2_{\text{à } kn \text{ dl}} = \chi^2_{\text{à } (k1+k2+\dots+kn) \text{ dl}}$$

Une variable Khi deux à k degrés de liberté peut donc être considéré comme étant la somme de k variables Khi deux à 1 degré de liberté indépendantes.

5.2.4. Table de la loi Khi deux.

La table de la loi Khi carré dépend du paramètre k, elle donne les valeurs de $\chi^2_{\text{à } k \text{ dl}}$ pour les valeurs de la fonction de répartition (probabilité).

Pour lire une valeur $\chi^2_{\text{à } k \text{ dl}}$ dans la table, il suffit de lire l'intersection entre la colonne correspondante à la valeur de la probabilité et la ligne correspondante au degré de liberté k.

<u>Exemple</u> :

La valeur de $\chi^2_{\text{à } 10 \text{ dl}}$ pour une probabilité de 0,95 correspond à l'intersection entre la colonne correspondante à 0,95 et la ligne correspondante à 10, on peut lire la valeur 18,3.

$$\chi^2_{0,95 \text{ à } 10 \text{ dl}} = 18,3$$

5.3. LA LOI T DE STUDENT.

5.3.1. Définition

On appelle variable t de Student, la variable t qui varie entre $-\infty$ et $+\infty$ et définie par la fonction de densité de probabilité :

$$f(t) = c \times \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$

Le paramètre k est une constante entière positive appelée nombre de degrés de liberté, on dit variable Student t à k degrés de liberté, désignée par $t_{\text{à } k \text{ dl}}$.

k est une constante telle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

La variable t de Student correspond aussi au quotient d’une variable normale réduite par la racine carrée d'une variable Khi deux $\chi^2_{\text{à } k \text{ dl}}$ indépendante de la première variable.

Soient Z une variable normale réduite et $\chi^2_{\text{à k dl}}$ une variable Khi deux à k degrés de liberté, indépendantes. On peut démontrer :

$$t_{\text{àkdl}} = \frac{Z}{\sqrt{\dfrac{\chi^2_{\text{àkdl}}}{k}}}$$

5.3.2. Caractéristiques de la loi $t_{\text{à k dl}}$.

On peut démontrer que :

Espérance mathématique : $E(t_{\text{à k dl}}) = 0$

Variance : $V(t_{\text{à k dl}}) = k / (k-2)$ pour $k_2 > 2$.

5.3.3. Table de la loi T de student.

La table de la loi T de student dépend du paramètre k, elle donne les valeurs de $t_{\text{à k dl}}$ pour les valeurs de la fonction de répartition (probabilité).

Pour lire une valeur $t_{\text{à k dl}}$ dans la table, il suffit de lire l'intersection entre la colonne correspondante à la valeur de la probabilité et la ligne correspondante au degré de liberté k.

Exemple :

La valeur de $t_{\text{à 10 dl}}$ pour une probabilité de 0,95 correspond à l'intersection entre la colonne correspondante à 0,95 et la ligne correspondante à 10, on peut lire la valeur 1,812.

$$t_{0,95 \text{ à 10 dl}} = 1,812$$

5.4. LA LOI F DE FISHER SNEDECOR.

5.4.1. Définition

On appelle variable F de Fisher, la variable F qui varie entre 0 et + ∞ et définie par la fonction de densité de probabilité :

$$f(x) = c \times x^{\frac{k1}{2}-1} \times (k_1 x + k_2)^{-\frac{k1+k2}{2}}$$

Les paramètres k_1 et k_2 sont deux constantes entières positives appelées nombre de degrés de liberté, on dit variable F à k_1 et k_2 degrés de liberté, désignée par $F_{\text{à k1 et k2 dl}}$.

k_1 et k_2 sont des constantes telle que : $\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$

La variable F de Fisher correspond aussi au quotient de variables Khi deux respectivement à k_1 et k_2 degrés de liberté $\chi^2_{\text{à k1 dl}}$ et $\chi^2_{\text{à k2 dl}}$ indépendantes.

Soient deux variables Khi deux $\chi^2_{\text{à k1 dl}}$ et $\chi^2_{\text{à k2 dl}}$ indépendantes. On peut démontrer :

$$F_{\text{àk1etk2dl}} = \frac{\chi^2_{\text{àk1dl}} / k1}{\chi^2_{\text{àk2dl}} / k2}$$

Il en résulte que si F est une variable $F_{\text{à k1 et k2 dl}}$, son inverse $\frac{1}{F}$ est une variable $F_{\text{à k2 et k1 dl}}$.

5.4.2. Caractéristiques de la loi $F_{\text{à k1 et k2 dl.}}$

On peut démontrer que :

Espérance mathématique: $E(F_{\text{à k1 et k2 dl}}) = \frac{k_2}{k_2 - 2}$ pour $k_2>2$.

Variance : $V(F_{\text{à k1 et k2 dl}}) = \frac{2k_2{}^2 \times (k_1 + k_2)}{k_1(k_2 - 2)^2(k_2 - 4)}$ pour $k_2 > 4$.

5.4.3. Tables de la loi F.

Il y a plusieurs tables de la loi F de Fisher pour différentes valeurs de la fonction de répartition F(probabilité).

Chaque table de la loi F de Fisher dépend des degrés de liberté k_1 et k_2, Pour lire une valeur $F_{\text{à k1 et k2 dl}}$ dans la table, il suffit de lire l'intersection entre la colonne correspondante à la valeur de k_1 et la ligne correspondante à la valeur de k_2.

<u>Exemple :</u>

La valeur de $F_{\text{à 10 et 15 dl}}$ pour une probabilité de 0,95 correspond dans la table de la loi F pour p=0,95, à l'intersection entre la colonne correspondante à 10 et la ligne correspondante à 15, on peut lire la valeur 2,54.

$$F_{\text{0,95 à 10 et 15 dl}} = 2{,}54$$

CHAPITRE 6 :
CONVERGENCE DES LOIS DE PROBABILITE
LOIS DES GRANDS NOMBRES

6.1. CONVERGENCE EN PROBABILITE.

On dit qu'une variable aléatoire Xn converge en probabilité vers une constante a si :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| > \varepsilon) = 0$$

Ceci signifie que l'écart entre la valeur de X et la constante a est très faible quand la taille de l'échantillon est grande. Cet écart peut être mesuré par la variance. Ainsi on parle de convergence en probabilité si :

$$\lim_{n\to\infty} V(X_n) = 0$$

6.2. CONVERGENCE EN LOI PROBABILITE.

6.2.1. Le théorème central limite

Le théorème central limite est une généralisation de la propriété d'additivité. Toute somme de variables aléatoires indépendantes tend à suivre une loi normale quelles que soient les lois de probabilités suivies par ces variables.

Quelles que soient les variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, …, X_n de moyennes respectivement m_1, m_2, …, m_n et d'écarts type respectivement σ_1, σ_2, …, σ_n. La somme de ces variables tend à suivre une loi normale de moyenne la somme des moyennes et d'écart type la racine carrée de la somme des variances des variables initiales.

$$L(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \approx N(m_1 + m_2 + \ldots + m_n, \sqrt{\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \ldots + \sigma_n{}^2})$$

Exemple :

Une caisse d'assurance maladie reçoit 120 personnes pour l'obtention de remboursements. On suppose que la somme à rembourser à chaque personne est une variable aléatoire de moyenne 1000 dirhams et d'écart type 600 dirhams. La caisse dispose de 130000 dirhams. Quelle est le risque que cette somme ne soit pas suffisante pour rembourser toutes les personnes ?

Désignons par X_i (i = 1 à 120) la somme à rembourser à chaque personne.
Désignons par X la somme totale que la caisse doit payer aux 120 personnes.

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{120}$$

D'après le théorème central limite, on peut affirmer que X suit une loi normale de moyenne la somme des moyennes et d'écart type la racine carrée de la somme des variances.

$$X = N(120\times1000; \sqrt{120\times600^2}) = N(120000; 6572,67)$$

La somme de 130000 dh ne sera pas suffisante si la somme totale à rembourser aux 120 personnes dépasse 130000 dh :

$$p(X > 130000) = 1 - p(X \leq 130000) = 1 - p(\frac{X - 120000}{6572,67} \leq \frac{130000 - 120000}{6572,67})$$

$$p(X > 130000) = 1 - p(Z \leq 1,52) = 1 - \prod(1,52) = 1 - 0,93574 = 0,0643$$

Il y a donc un risque de 6,5 % que la somme de 130000 dirhams ne soit pas suffisante pour rembourser toutes les personnes.

6.2.2. Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale.

Dès que l'effectif N de la population devient important, le calcul de $p(k) = \frac{C_{n_1}^{k} C_{n_2}^{n-k}}{C_N^n}$ devient fastidieux. On peut démontrer dans ce cas que lorsque l'effectif de la population (N) tend vers l'infini et la proportion des individus possédant le caractère étudié (p) est constante ou tend vers une constante, la loi hypergéométrique tend vers une loi binomiale de paramètre n et p. On peut dans ce cas effectuer les calculs de probabilités de façon approximative à l'aide de la formule de la loi binomiale.

En pratique, l'approximation est satisfaisante dés que la proportion des individus prélevés est inférieure à 5 %.

$$\frac{n}{N} < 0,05 \quad \text{ou} \quad N > 20\,n$$

6.2.3. Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson.

Dès que le paramètre n de la loi binomiale devient grand, le calcul de $p(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ devient fastidieux. On peut démontrer dans ce cas que lorsque le nombre d'expériences indépendantes (n) tend vers l'infini et la probabilité de succès tend vers zéro de telle sorte que le produit np tend vers une constante, la loi binomiale de paramètre n et p tend vers une loi de Poisson de paramètre np. On peut dans ce cas effectuer les calculs de probabilités de façon approximatives à l'aide de la formule de la loi de Poisson.

En pratique, l'approximation est satisfaisante lorsque la probabilité p est inférieure à 0,1 et le produit np est inférieur à 5.

6.2.4. Approximation de la loi binomiale par la loi normale.

Parfois les problèmes relatifs à la loi binomiale se rapportent aux calculs de probabilités dans un ou plusieurs intervalles donnés :

$$p(X < x) \qquad p(X > x) \qquad \text{ou} \qquad p(x1 < X < x2)$$

La recherche de ces probabilités est souvent longue, car il faut déterminer individuellement et additionner les différentes probabilités p(X = x).

$$p(X<10)=p(0)+p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)+p(7)+p(8)+p(9)$$

Lorsque le paramètre n de la loi binomiale est grand et les probabilités de succès p et d'échec q ne sont pas trop petites, on peut effectuer ce calcul d'une manière approchée à l'aide de la loi normale de paramètres np et $\sqrt{npq}$.
En pratique l'approximation est satisfaisante lorsque les produits np et nq sont supérieurs à 5 :

$B(n ; p) \approx N(np ; \sqrt{npq})$

Exemple :

On suppose que la probabilité qu'un étudiant réussisse un examen est de 0,8. Quelle est la probabilité qu'au moins 75 étudiants parmi 100 étudiants réussissent l'examen ?

Désignons par X le nombre d'étudiants qui réussissent l'examen.

X est une variable discrète qui prend les valeurs entières de 0 à 100. Elle suit une loi binomiale de paramètres 100 et 0,8.

$$X = B(100 ; 0{,}8)$$

La probabilité qu'au moins 75 étudiants parmi 100 étudiants réussissent l'examen est :

$$p(X \geq 75)$$

Les produits np et nq sont respectivement 100×0,8 = 80 et 100×0,2 = 20, ils sont supérieurs à 5. On peut donc effectuer le calcul de cette probabilité d'une manière approchée à l'aide de la loi normale de paramètres np = 80 et $\sqrt{npq} = 4$.

$$X = B(100 ; 0{,}8) \approx N(80 ; 4)$$

Pour améliorer la qualité de l'approximation on introduit la correction de continuité, la probabilité $p(X \geq 75)$ devient :

$$p(X \geq 75 + 0{,}5) = 1 - p(X < 75{,}5)$$

$$p(X \geq 75{,}5) = 1 - p\left(\frac{X-80}{4} < \frac{75{,}5-80}{4}\right) = 1 - p(Z < -1{,}13)$$

$$p(X \geq 75{,}5) = 1 - \prod(-1{,}13) = \prod(1{,}13) = 0{,}8708$$

$$p(X \geq 75) \approx 0{,}8708$$

La probabilité qu'au moins 75 étudiants parmi 100 étudiants réussissent l'examen est à peu près 0,8708.

Le calcul exact à partir de la loi binomiale donne un résultat de 0,8686. On constate que l'approximation est très satisfaisante.

6.2.5. Approximation de la loi Khi deux par la loi normale.

Une variable Khi deux à k degrés de liberté peut être considérée comme étant la somme de k variables Khi deux à 1 degré de liberté indépendantes.

De ce fait, et par application du théorème central limite, on peut affirmer que la loi Khi deux tend vers une loi normale de paramètres k et $\sqrt{2k}$. Ce qui permet de résoudre les problèmes relatifs aux distributions χ^2 de nombre de degrés de liberté k élevé. Toutefois, la convergence vers la loi normale est relativement lente, l'approximation est généralement satisfaisante lorsque k est supérieur à 100. Pour un nombre de degré de liberté compris entre 30 et 100, on préfère faire usage de la racine carrée. On peut en effet démontrer que la transformation :

$$Z = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2k-1}$$

est très proche de la loi normale centrée réduite. On peut aussi utiliser la transformation inverse :

$$\chi^2 = \frac{(Z + \sqrt{2k-1})^2}{2}$$

<u>Exemple 1</u> :

La lecture de la table Khi deux donne :

$$\chi^2_{0,95 \text{ à } 30 \text{ dl}} = 43,8$$

En utilisant l'approximation de la loi Khi deux par la transformation ci dessus on obtient :

$$\chi^2 = \frac{(Z_{0,95} + \sqrt{2 \times 30 - 1})^2}{2}$$

La lecture de la table de la fonction de répartition de la loi normale réduite montre que la valeur de z pour F(z) = 0,95 est égale à 1,65.

$$\chi^2 = \frac{(1,65 + \sqrt{59})^2}{2} = 43,54$$

On constate que l'approximation est très satisfaisante.

<u>Exemple 2</u> :

La valeur de $\chi^2_{0,95 \text{ à } 150 \text{ dl}}$ ne se trouve pas dans la table statistique. Le nombre de degrés de liberté étant très grand, on peut utiliser l'approximation par la loi normale de moyenne 150 et d'écart type.

En passant à la loi normale centrée réduite on obtient :

$$\frac{\chi^2_{0,95 à 150 dl} - 150}{17,32} = Z_{0,95}$$

d’où :

$$\chi^2_{0,95\text{ à }30\text{ dl}} = Z_{0,95} \text{ x } 17,32 + 150$$

$$\chi^2_{0,95\text{ à }30\text{ dl}} = 1,65 \text{ x } 17,32 + 150 = 178,58$$

6.2.6. Approximation de la loi t de Student par la loi normale.

Lorsque le nombre de degrés de liberté k est très élevé, la loi t de Student peut être directement assimilée à la loi normale réduite sans effectuer aucun changement de variable. Ce qui permet de résoudre les problèmes relatifs aux distributions t de nombre de degrés de liberté élevé.

L'approximation est généralement satisfaisante lorsque k est supérieur à 30.

Exemple :

La lecture de la table t donne :

$$t_{0,95\text{ à }80\text{ dl}} = 1,664 \qquad \text{et} \qquad t_{0,8\text{ à }80\text{ dl}} = 0,846$$

En utilisant l'approximation de la loi t par la loi normale réduite, on peut lire dans la table de la fonction de répartition de la loi normale réduite la valeur de z pour F(z) = 0,95 qui est égale à 1,65.

La lecture de la table de la fonction de répartition de la loi normale réduite montre que la valeur de z pour F(z) = 0,80 est égale à 0,84.

On constate que l'approximation est satisfaisante.